

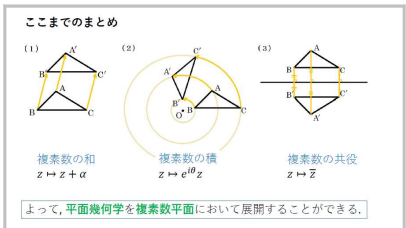
複素数平面とEuclid幾何学



9月24日(水曜日)、第8回(理系第4回)チャレンジ講座を実施しました。今回は、理工学部の坊向伸隆先生に「複素数平面とEuclid幾何学」という題目で講義をしていただきました。

今回の講義では、2次元Euclid幾何学(平面幾何学)と複素数平面の関係について考察しました。2次元Euclid幾何学とは、平行移動、回転移動、対称移動によって不変に保たれるものを研究する学問です。

講義の前半では、複素数の演算や記号の意味を学び、平面幾何学の操作が複素数平面ではどのように表現できるかを確認しました。具体的には、平行移動は複素数の加法、回転移動は単位複素数との乗法、対称移動は共役な複素数として表されることがわかりました。



疑問. (1), (2), (3) はいずれも2点の距離を保つ写像であるが、逆に、2点の距離を保つような写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は、この3種類の移動を組み合わせたものに限るのか?

(?_?)

チャレンジ. 2点の距離を保つような写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (つまり、任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)|$ を満たすような写像) の正体を明らかにせよ!

講義の後半では、これらの移動がすべて距離を保つ写像であることから、「2点の距離を保つ写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は、この3種類の移動を組み合わせたものに限るのか」という問いを考察しました。距離の不変性の条件をもとに、最終的に $f(z)$ は、 $f(z) = e^{i\theta} z + \gamma$ または $f(z) = e^{i\theta} \bar{z} + \gamma$ の形で表されることがわかりました。

$f(z) = e^{i\theta} z + \gamma$ は、点 z を回転移動と平行移動した点であり、
 $f(z) = e^{i\theta} \bar{z} + \gamma$ は、点 z を対称移動した点 $\bar{z}$ を回転移動と平行移動した点であることから、2点の距離を保つような写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は、この3種類の移動を組み合わせたものに限ることが証明できました。

高校数学で学んでいる知識が、より深い数学につながっていることを実感できた講義でした。

今回の記事(講義概要)は、中津北高校が担当しました。

チャレンジ. 2点の距離を保つような写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (つまり、任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)|$ を満たすような写像) の正体を明らかにせよ!

解答. $\gamma = f(0)$ とおくと、写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は $\theta \in \mathbb{R}$ を用いて $f(z) = e^{i\theta} z + \gamma$ または $f(z) = e^{i\theta} \bar{z} + \gamma$ と表される。

逆に、任意の $\theta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ から写像 $f_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ と $f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ $f_1(z) = e^{i\theta} z + \gamma$, $f_2(z) = e^{i\theta} \bar{z} + \gamma$ で構成すれば、

$|\alpha - \beta| = |f_1(\alpha) - f_1(\beta)|$, $|\alpha - \beta| = |f_2(\alpha) - f_2(\beta)|$ が成り立つ。(解答終わり)

ちなみに、 $f_1(z) = e^{i\theta} z + \gamma$ は点 z を原点のまわりに角 θ だけ回転移動し、 γ だけ平行移動した点である。

$f_2(z) = e^{i\theta} \bar{z} + \gamma$ は点 z を実軸に関して対称移動し、原点のまわりに角 θ だけ回転移動し、 γ だけ平行移動した点である。

よって、2点の距離を保つような写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は、3種類の移動を組み合わせたものに限る。

今回の講座にはオンラインで17校124名の高校生が参加しました。感想の一部を紹介します。

- 高校では学べないところを教えてもらえて面白かった。
- 大学の内容を聞くことができたしわかりやすかったのでとてもよかった。
- まだわからないことが多かったけれど、これから学んでいくことについて知れたのでよかったです。
- 複素数やグラフの移動と関連があったと知り興味深かった。
- とても刺激的な講座でした。